第11講　微分の基本

11

［A］ (5)は $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ を，それ以外は $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．ただし，a は実数の定数，n は自然数とする．

(1) $y=(3x-2)^2(x^2+x+1)^3$

(2) $y=\sqrt{1+\sqrt{x}}$

(3) $y=\log|x+\sqrt{x^2+a}|$

(4) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}}$

(5) $y=x^m$ （m は有理数）

(6) $y=x^{\cos x}$ （$x>0$）

(7) $x=\cos y$ （$0\leqq y\leqq\pi$）

(8) $x=\dfrac{1}{1+t^2}$，$y=\dfrac{t}{1+t^2}$ （$t>0$）

(9) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=xy$

［B］ 商の微分の公式

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

を示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　微分の基本

11　定義に従って微分することにより，以下の微分の公式

$$\{\sqrt{f(x)}\}' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

を示せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 11 講　微分の基本

11

［A］ (5)は $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ を，それ以外は $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．ただし，a は実数の定数，n は自然数とする．

(1)　$y=(3x-2)^2(x^2+x+1)^3$

(2)　$y=\sqrt{1+\sqrt{x}}$

(3)　$y=\log|x+\sqrt{x^2+a}|$

(4)　$y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}}$

(5)　$y=x^m$　(m は有理数)

(6)　$y=x^{\cos x}$　$(x>0)$

(7)　$x=\cos y$　$(0\leqq y\leqq \pi)$

(8)　$x=\dfrac{1}{1+t^2}$，$y=\dfrac{t}{1+t^2}$　$(t>0)$

(9)　$\sqrt{x}+\sqrt{y}=xy$

［B］ 商の微分の公式

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

を示せ.

【答】 ［A］ (1) $3x(3x-2)(8x+1)(x^2+x+1)^2$　(2) $\dfrac{1}{4\sqrt{x(1+\sqrt{x})}}$　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$

(4) $-\dfrac{2(x+1)}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2(x-1)^5}}$　(5) $m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$

(6) $x^{\cos x-1}(\cos x-x\sin x\log x)$　(7) $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　(8) $\dfrac{t^2-1}{2t}$　(9) $\dfrac{\sqrt{y}(1-2y\sqrt{x})}{\sqrt{x}(2x\sqrt{y}-1)}$

［B］ 略

【解説】

［A］ (1)

$$\begin{aligned}y'&=2(3x-2)\cdot(3x-2)'\cdot(x^2+x+1)^3+(3x-2)^2\cdot 3(x^2+x+1)^2\cdot(x^2+x+1)'\\&=6(3x-2)(x^2+x+1)^3+3(3x-2)^2(x^2+x+1)^2(2x+1)\\&=3(3x-2)(x^2+x+1)^2\{2(x^2+x+1)+(3x-2)(2x+1)\}\\&=\boldsymbol{3x(3x-2)(8x+1)(x^2+x+1)^2}\end{aligned}$$

(2)

$$y'=\frac{(1+\sqrt{x})'}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}=\boldsymbol{\frac{1}{4\sqrt{x(1+\sqrt{x})}}}$$

(3)

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot(x+\sqrt{x^2+a})'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot\left\{1+\frac{(x^2+a)'}{2\sqrt{x^2+a}}\right\}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(4)　$y=(x^2+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{-\frac{2}{3}}$ より

$$y'=\frac{1}{3}(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}\cdot(x^2+1)'\cdot(x-1)^{-\frac{2}{3}}+(x^2+1)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)(x-1)^{-\frac{5}{3}}$$

$$=\frac{2}{3}(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{5}{3}}\{x(x-1)-(x^2+1)\}=\boldsymbol{-\frac{2(x+1)}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2(x-1)^5}}}$$

(5)　$y'=mx^{m-1}$，$y''=m(m-1)x^{m-2}$，$\cdots$ より帰納的に

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\boldsymbol{m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}}$$

(6)　$\log y=\log x^{\cos x}=\cos x\log x$ より，$\log y=\cos x\log x$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=-\sin x\log x+\cos x\cdot\frac{1}{x}$$ となるので

$$y'=\boldsymbol{x^{\cos x-1}(\cos x-x\sin x\log x)}$$

(7)　$x=\cos y$ の両辺を y で微分すると $\dfrac{dx}{dy}=-\sin y$ となるが，

$-\sin y=-\sqrt{1-\cos^2 y}=-\sqrt{1-x^2}$ より　$\dfrac{dy}{dx}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

(8)　$x=(1+t^2)^{-1}$ より $\dfrac{dx}{dt}=-(1+t^2)^{-2}\cdot(1+t^2)'=-\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$，$y=t(1+t^2)^{-1}$ より

$$\frac{dy}{dt}=1\cdot(1+t^2)^{-1}+t\cdot\{-(1+t^2)^{-2}\cdot(1+t^2)'\}=\frac{1}{1+t^2}-\frac{2t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$$ なので，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\boldsymbol{\frac{t^2-1}{2t}}$$

(9)　両辺を x で微分すると $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{y'}{2\sqrt{y}}=1\cdot y+xy'$ となるので，$\dfrac{dy}{dx}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{y}(1-2y\sqrt{x})}{\sqrt{x}(2x\sqrt{y}-1)}}$

［B］

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)-f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 11 講　微分の基本

11　定義に従って微分することにより，以下の微分の公式

$$\{\sqrt{f(x)}\}'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

を示せ．

【答】　略

【解説】

$$\begin{aligned}\{\sqrt{f(x)}\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{f(x+h)}-\sqrt{f(x)}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h\{\sqrt{f(x+h)}+\sqrt{f(x)}\}}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{\sqrt{f(x+h)}+\sqrt{f(x)}}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}\\ &= \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。